Kontrolni zadatak iz matematike

Sastavila učenica Lana Vujošević

1. Izračunati površinu figure ograničene lukom krive $f(x) = e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}$, pravom $x=1$ i x osom. (20)

2. Odrediti sledeće integrale:

a) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$ (5)

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2x-1) \sin 3x \, dx$ (10)

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx$ (15)

3. Izračunaj:

a) $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$ (10)

b) $\int \frac{x\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right)^2}{x^2-1} dx$ (15)

4. Izračunaj sledeći integral:

$$\int \frac{x^3+6}{x^3-5x^2+6x} \cdot dx$$ (25)

Smatram da sam kao učenik čija je srednja ocjena 3 nekompetentna za sastavljanje kontrolnog za više ocjene, ali zbog osjećanja dužnosti prema ocjeni na tromjesječju potrudila sam se da sastavim kontrolni.

Kontrolni zadatak sam sastavila tako da zadaci ne idu redom od najlakšeg do najtežeg nadajući se da će svaki učenik, na osnovu iz predhodnih iskustava, započeti rad prvih, „najlakših" i natjerati svoje sive ćelije da urade zadatak van naučenog šablona i možda zaraditi više poena.

Bodovna lista je sastavljena tako da najvišu ocjenu mogu dobiju oni učenici čiji kontinuirani rad ne dozvoljava grešku veću od 3%(97-100 bodova). Za prolaznost, učenici moraju da vladaju više od polovine gradiva (51-65). Od 66 do 80 bodova, učenici dobijaju ocjenu 3. Učenici koji teže odličnoj ocjeni, na ovom kontrolnom će uvidjeti da se matematika ne uči u poslednji čas ili će ih njihova dobrota i drugarstvo kazniti manjkom koncetracije tokom rada i dobiti ocjenu 4 (81-96).

2.

1. Učenik dobija 20 poena ukoliko do kraja tačno završi zadatak. Ukoliko uoči smjene, a ne dovede zadatak do kraja, dobija 10 poena. Greške u vidu pogrešnog znaka ili svojstva se ne praštaju, učenik dobija 0 poena. Poželjno je da učenik nacrta koordinatni sistem i označi površinu figure, ukoliko to uradi, na tome može da mu se poveća ocjena ukoliko je na granici između dvije.

(1) $\int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right)dx = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ 2t\,dt = dx \\ 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{matrix} \right|$

$= 2\int_0^1 t\left(e^{t} - e^{-t}\right)dt = \left| \begin{matrix} u=t & dv=(e^{t}-e^{-t})dt \\ du=dt & v=e^{t}+e^{-t} \end{matrix} \right|$

$= 2t\left(e^{t}+e^{-t}\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \left(e^{t}+e^{-t}\right)dt$

$= 2e + \frac{2}{e} - 2\left(e^{t}-e^{-t}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{e}$

Parcijalna integracija!
Nije po planu i programu

5.

1

2.a) Učenik koji tečno, postupno dovede do kraja zadatak dobija 5 poena. Ukoliko se desi greška u znaku, pa i u rezultatu, učenik dobija 0 poena.

(2.) a) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2x-1)\sin 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u=2x-1 & dv=\sin 3x \\ du=2dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right|$

$= \frac{1-2x}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\sin 3x = -\frac{1}{9}$

Parcijalna integracija!

b) Učenik dobija 10 poena ukoliko uoči smjenu i dovede zadatak tačno do kraja. Ukoliko učenik ne bude umio da primjeni neka svojstva određenog integrala i ne dovede zadatak do kraja, u zavisnosti koliko je blizu otkrića rješenja, dobija određeni broj poena(ukoliko pogriješi u drugom koraku dobija 20% poena, drugom 50%, trećem 70%). Ako učenik ne umije ni smjenu da uoči, dobija 0 poena.

c) Učenik dobija 10 poena ukoliko uoči smjenu i dovede zadatak tačno do kraja. Ukoliko učenik ne bude umio da primjeni neka svojstva određenog integrala i ne dovede zadatak do kraja, u zavisnosti koliko je blizu otkrića rješenja, dobija određeni broj poena(ukoliko pogriješi u drugom koraku dobija 40% poena, u trećem 50%). Ako učenik ne uoči tačnu smjenu, primjeni svojstva i dobije rješenje, dobija 0 poena.

c) $$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t^6 = e^x+3 \\ 6t^5\,dt = e^x\,dx \\ 0 \to \sqrt[6]{4} \\ \ln 2 \to \sqrt[6]{5} \end{array} \right|$$

$$= 6\int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6\,dt = \frac{6}{7}t^7\Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7}\left(5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}\right)$$

3. a) Učenik dobija 10 poena ukoliko dovede zadatak tačno do kraja. Ukoliko učenik ne bude umio da primjeni neka svojstva neodređenog integrala i ne dovede zadatak do kraja, u zavisnosti koliko je blizu otkrića rješenja, dobija određeni broj poena(ukoliko pogriješi u drugom koraku dobija 20% poena, trećem 50%,). Ako učenik ne uradi zadatak postupno i tačno do kraja(i ako u poslednjem koraku zaboravi +c) dobija 0 poena.

3. a) $$\int \frac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

4. 1100

$$= 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 2\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx =$$

$$= 3\,\mathrm{tg}\,x - 2(-\mathrm{ctg}\,x) = 3\,\mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{ctg}\,x + C$$

b) Učenik dobija 15 poena ukoliko uoči smjenu i dovede zadatak tačno do kraja. Ukoliko učenik ne bude umio da primjeni neka svojstva neodređenog integrala i ne dovede zadatak do kraja, u zavisnosti koliko je blizu otkrića rješenja, dobija određeni broj poena(ukoliko pogriješi u prvom koraku dobija 20% poena, drugom 50%, trećem 70%). Ako učenik pogrešno uvede smjenu ili napravi banalnu grešku, dobija 0 poena.

1. $\left[-3,-\frac{3}{2}\right)$

6) $\displaystyle\int \frac{x\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right)^2}{x^2-1}\,dx = \int \ln^2(1-x^2)\frac{x\,dx}{x^2-1}$ $\left| \begin{array}{l} t=\ln(1-x^2) \\ dt=\frac{-2x\,dx}{1-x^2} \end{array} \right|$

$$= \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{6}t^3 + C = \frac{1}{6}\ln^3(1-x^2) + C$$

4. Ovaj zadatak je namijenjen većim ocjenama. Ukoliko učenik dobije isti rezultat sličnim postupkom, dobija 25 poena. Ukoliko učenik dobije isti rezultat, ali skraćenim, ne postupnim koracima, sumnjivim postupkom, dobija 20 poena. Ukoliko učenik koji ne uradi 3., a uradi ovaj zadatak, ispitati ga, jer u suprotnom mu sleduje 0 poena. U zavisnosti koliko je učenik odmakao do cilja, dobija određeni broj poena(ukoliko pogriješi u drugom koraku dobija 20% poena, trećem 30%, četvrtom 40%, petom 50%...). Ocjenjivaču je data sloboda da ocjeni učenika brojem poena kojim smatra da je dokazao svoje znanje, naravno u saglasnosti sa gore navedenim pravilima.

(4) $\int \frac{x^3+6}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

$$\frac{x^3+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+6}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+6}{x^3-5x^2+6x}$$

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow \int dx + \int \frac{5x^2-6x+6}{x(x-2)(x-3)}\,dx$$

$$\frac{5x^2-6x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$5x^2-6x+6 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2) =$$
$$= x^2(A+B+C) + x(-5A-3B-2C) + 6A$$

$$5 = A+B+C$$
$$-6 = -5A-3B-2C, \quad 6 = 6A$$
$$A = 1, \quad B = -7, \quad C = 11$$

3. 8

$$\int dx + \int \frac{dx}{x} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 11\int \frac{dx}{x-3} =$$
$$= x + \ln|x| - 7\ln|x-2| + 11\ln|x-3) + C$$